

#StayAtHome

**Laborbericht / Versuchsprotokoll
des Laborpraktikas Nr.6**

Gallus Kaufmann, 16-921-223

Nando Galliard, 14-938-211

Serafin Herger, 14-932-040

227-0117-10L Mess- und Versuchstechnik

ETH Zürich

28.05.2020

Hinweis:

Dieser Bericht wurde zu gleichen Teilen verfasst von Nando Galliard, Serafin Herger und Gallus Kaufmann.

Contents

1	Einführung	2
1.1	Versuchsziel	2
1.2	Theorie	2
1.3	Versuchsaufbau	4
1.3.1	Versuchsaufbau des Pendels	4
1.3.2	Messplan der Pendel	4
1.4	Messunsicherheiten	5
1.5	Ergänzende Einführung	6
1.5.1	Kleinwinkelnäherung	6
2	Messprotokoll	7
2.1	Messprotokoll Serafin	7
2.1.1	Umgebungsbedingungen	7
2.1.2	Verwendete Geräte	7
2.2	Messprotokoll Nando	8
2.2.1	Umgebungsbedingungen	8
2.2.2	Verwendete Geräte	8
2.3	Messprotokoll Gallus	10
2.3.1	Umgebungsbedingungen	10
2.3.2	Verwendete Geräte	10
3	Messunsicherheiten	12
4	Ergebnisse	13
4.1	Ergebnis von Nando	13
4.2	Ergebnis von Serafin	14
4.3	Ergebnis von Gallus	15
4.4	Zusammenfassung pro Person	15
4.5	Zusammenfassung pro Winkel	16
5	Diskussion	17

1 Einführung

1.1 Versuchsziel

Ziel dieses Versuches ist es, die Gravitationsbeschleunigung g mittels Messung der Periode eines Fadenpendels zu bestimmen.

1.2 Theorie

Die Differentialgleichung eines ungedämpften Pendels ist bekannterweise:

$$\frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\Theta(t)) = 0 \quad (1)$$

Wobei $\Theta(t)$ der Winkel zwischen dem Pendel und dessen Lot darstellt. L die Länge des Massenschwerpunktes zum Drehpunkt und g die Gravitationsbeschleunigung ist.

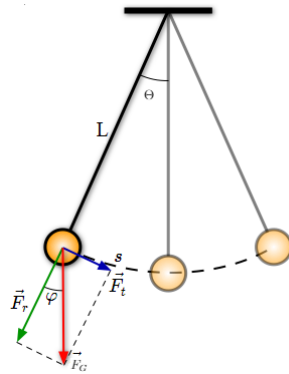


Figure 1: Fadenpendel

Dabei lässt sich $\sin(\Theta(t))$ für $\Theta(t) \ll 1$ zu $\sin(\Theta(t)) \approx \Theta(t)$ approximieren. Damit erhält man die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}(t) + \frac{g}{L}\Theta(t) = 0 \quad (2)$$

Für die Anfangsbedingungen $\Theta(0) = \Theta_0$ und $\frac{d\Theta}{dt}(0) = 0$ (im Folgenden wird immer $\Theta_0 \ll 1$ angenommen) erhält man durch lösen der Gleichung 2 die allgemeine Lösung:

$$\theta(t) = \Theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + \phi\right) \quad (3)$$

Wobei ϕ eine konstante Phasenverschiebung des Winkels ist, mit den oben genannten Anfangsbedingungen gilt $\phi = 0$. Daraus lässt sich leicht schliessen, dass für die Eigenkreisfrequenz folgendes gilt: $\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$. Dies führt zur weit verbreiteten Formulierung für die Periode eines Pendels:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

Was einen schliesslich zu der hiesig wichtigen Formel führt:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (5)$$

1.3 Versuchsaufbau

1.3.1 Versuchsaufbau des Pendels

Das Ziel des Versuches ist es, die lokale Gravitationskonstante zu bestimmen. Dies erreicht man mit der Formel (5), wobei die Länge L und die Periode T des Pendels noch zu messen sind. Die Länge L des Pendels wird vom Mittelpunkt der beschwerten Masse bis hin zum Drehpunkt gemessen. Um die Periode T des Pendels bestimmen, wird ein handelsübliches Smartphone benutzt und dies nimmt dabei die Schwingung mit der Videokamera auf. Mit diesen Videos lässt sich schließlich die Dauer der Periode auslesen.

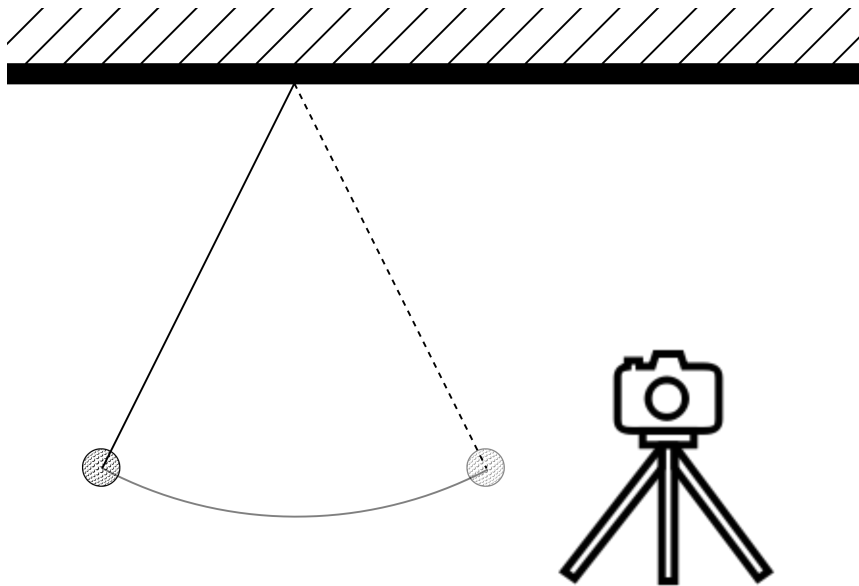


Figure 2: Skizze des Versuchsaufbau

1.3.2 Messplan der Pendel

Bei diesem Versuch wird, wie im Versuchsaufbau beschrieben, die Periode mehrmals gemessen von einem Lotzustand zum Übernächsten und in der unten stehenden Tabelle notiert und gemittelt. Zudem wird die Länge des Pendels jeweils festgehalten. Weiterhin wird festgehalten, welches Smartphone mit welcher App filmt und welches Material für das Pendel (Schnur/Seil und Masse) verwendet wird.

Messung Nr. & Name	Bildfrequenz in FPS	Länge Pendel L in mm	T # 1 in ms	T # 2 in ms	T # 3 in ms	Mittel Periode T in ms
1 (N)						
2 (N)						
3 (N)						
4 (N)						
5 (N)						

1.4 Messunsicherheiten

Die allgemeine Formel für den im Mittel erwarteten Fehler des Gesamtergebnisses $\Delta\bar{Y}$ ist aus der Vorlesung gegeben als:

$$\Delta\bar{Y} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\delta f}{\delta x_j} \Delta x_j\right)^2} \quad (6)$$

Δx_j mittlerer Fehler der in das Gesamtergebnis eingehende Einzelgrößen
 x_j in das Gesamtergebnis eingehende Einzelgrößen
 $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ partielle Ableitungen

Mit dieser Formel wird die Fehlerfortpflanzung der Gravitationsbeschleunigung hergeleitet.

Nachfolgend sind die Messunsicherheiten und die Fehlerfortpflanzung aufgeführt:

- Längenmessung ΔL mit einem Doppelmeter (bzw. Gliedermesstab):
 - Typ A Messunsicherheit
 - Genauigkeit: $\pm 10\text{mm}$ pro 2m Gliedermesstab [2]
- Zeitmessung der Periode ΔT :
 - Typ A Messunsicherheit
 - Genauigkeit: Abhängig von der Bildfrequenz des Videoaufnahmegeätes und der Unterscheidbarkeit der einzelnen Bilder. Weshalb man dazu erst in Kapitel 4 "Messunsicherheiten" genauere Aussagen machen kann.
- Gravitationsbeschleunigung Δg :
 - Fehlerfortpflanzung in der Praxis

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T^2} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{4\pi \cdot L}{T^3} \cdot \Delta T\right)^2} \quad (7)$$

Die folgenden Einflüsse werden bei den Messunsicherheiten in dieser Versuchsreihe vernachlässigt:

- Luftwiderstand und andere Reibungsverluste (wir gehen von einer ungedämpften harmonischen Schwingung wie in Kapitel 1.2 aus).
- Elastizität und zeitliche Verformung des Pendelfadens (z.B. durch Feuchtigkeit und Temperaturveränderung)
- Gewicht des Pendelfaden und der damit verbundenen Verschiebung des Massenschwerpunktes
- Allfällige Deformierung des schwingenden Körpers oder dessen Befestigungspunktes
- Die Änderung der Schwingungsebene aufgrund der Corioliskraft ist für die Periode nicht relevant. Die durch die Corioliskraft wirkenden Kräfte (z.B. auf die Befestigung der Schnur) und dem damit einhergehenden Reibungsverlust sind vernachlässigbar klein.

1.5 Ergänzende Einführung

1.5.1 Kleinwinkelnäherung

Doch für welche Winkel ist die Kleinwinkelnäherung nun sinnvoll? Dazu betrachten wir vorerst theoretisch den Unterschied zwischen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und dessen linearisierten Annäherung $\hat{f}(x) = x$. Dazu stellen wir folgendes fest: Für einen Winkel von 9.9° erhalten wir für die Linearisierung $\hat{f}(x)$ einen 0.5% Fehler zu dem Wert der korrekten Funktion $f(x)$. Für 14° einen 1% Fehler, 24° einen 3% Fehler und für 31.6° einen 5% Fehler. Um die Unsicherheitsbetrachtung der Gravitationsbeschleunigung sinnvoll abhängig von der Zeit- und Längenmessung zu machen, wollen wir keinen grösseren Fehler als 3% durch die Linearisierung haben. Dennoch messen wir den Winkel 31.6° auch noch, um die Resultate bei verschiedenen Winkeln zu vergleichen um schliesslich experimentell zu untersuchen, bis wohin unsere Kleinwinkelannäherung sinnvoll ist.

2 Messprotokoll

Die Periode wurde folgendermassen ermittelt: Am Computer wurde das jeweilige Bild am Tiefpunkt ausgesucht und als Startzeit aufgeschrieben. Nun wird das Bild vom sechsten Mal, wo der Pendel den Tiefpunkt passiert (bzw. zum dritten Mal von der selben Richtung passiert), gemessen und als Endzeit aufgeschrieben. Die Differenz von Endzeit zu Startzeit ist nun gerade drei mal die Pendelperiode. Um nun die Periode zu erhalten, muss dieser Wert nun noch auf eine Periode gemittelt werden (also durch 3 dividiert werden).

2.1 Messprotokoll Serafin

2.1.1 Umgebungsbedingungen

Ort: Wangen SZ
Datum: 24.05.2020

2.1.2 Verwendete Geräte

Ball Golfball, Gewicht 46 g, Durchmesser 43 mm
Schnur Länge $L = 180$ cm
Massstab Geodreieck, Lineal, Gliedermassstab
Kamera mit 60 Bilder/s
Papier mit eingezeichneten Winkeln
Klebeband Malerклеbeband
Drehpunkt Reisszwecke



Figure 3: Versuchsaufbau von Serafin

Winkel	Messung Nr.	Start Zeit in s	End Zeit in s	Zeit für 3 Perioden in s	Durchschnitt Periode in s
10°	1	14.199	22.335	8.136	2.7120
	2	51.552	59.631	8.079	2.6930
	3	75.529	83.387	7.858	2.6193
14°	1	22.533	30.612	8.079	2.6930
	2	48.621	56.713	8.092	2.6973
	3	73.123	81.219	8.096	2.6987
24°	1	13.338	21.460	8.122	2.7073
	2	37.128	45.299	8.171	2.7237
	3	64.921	73.087	8.166	2.7220
31.6°	1	14.692	22.868	8.176	2.7253
	2	39.066	47.259	8.193	2.7310
	3	68.180	76.368	8.188	2.7293

Table 1: Messtabelle Serafin

2.2 Messprotokoll Nando

2.2.1 Umgebungsbedingungen

Ort: Herrliberg
Datum: 24.05.2020

2.2.2 Verwendete Geräte

Ball Golfball, Gewicht 46 g, Durchmesser 43 mm
Schnur Länge $L = 180$ cm
Messband Geodreieck, Lineal, Gliedermassstab
Kamera mit 480 Bilder/s, d.h. Faktor 1/16 für die Periodendauer
Papier mit eingezeichneten Winkeln
Kleber Ductape
Drehpunkt Nagel



Figure 4: Versuchsaufbau von Nando

Bei der Start- und Endzeit ist zu beachten, dass das Video in Zeitlupe mit einem Faktor 1:16 zur Echtzeit abgespielt wird, bedingt durch die hohe Bildwiederholungsrate der Kamera. Dieser Faktor wird für die Periodenzeit miteingerechnet.

Winkel	Messung Nr.	Start Zeit in s	End Zeit in s	Zeit für 3 Perioden in s	Durchschnitt Periode in s
10°	1	4.436	132.889	8.028	2.6761
	2	13.4	142.385	8.061	2.6872
	3	19.254	147.785	8.033	2.6777
14°	1	18.735	147.201	8.029	2.6764
	2	15.451	144.435	8.061	2.6872
	3	13.568	142.402	8.052	2.6840
24°	1	17.869	144.618	7.921	2.6406
	2	12.001	140.035	8.002	2.6674
	3	11.818	141.218	8.087	2.6958
31.6°	1	12.458	142.786	8.145	2.7152
	2	12.31	142.879	8.160	2.7202
	3	17.101	147.444	8.146	2.7155

Table 2: Messtabelle Nando

2.3 Messprotokoll Gallus

2.3.1 Umgebungsbedingungen

Ort: St. Gallen
Datum: 24.05.2020

2.3.2 Verwendete Geräte

Ball Tennisball, 57g, Durchmesser $d = 65\text{mm}$
Schnur Länge $L = 42\text{cm}$
Massstab Geodreieck, Lineal, Gliedermassstab
Kamera mit 240 Bilder/s, d.h. Faktor 1/8 für die Periodendauer
Papier mit eingezeichneten Winkeln
Klebeband Malerклеbeband
Drehpunkt befestigter Schlüssel

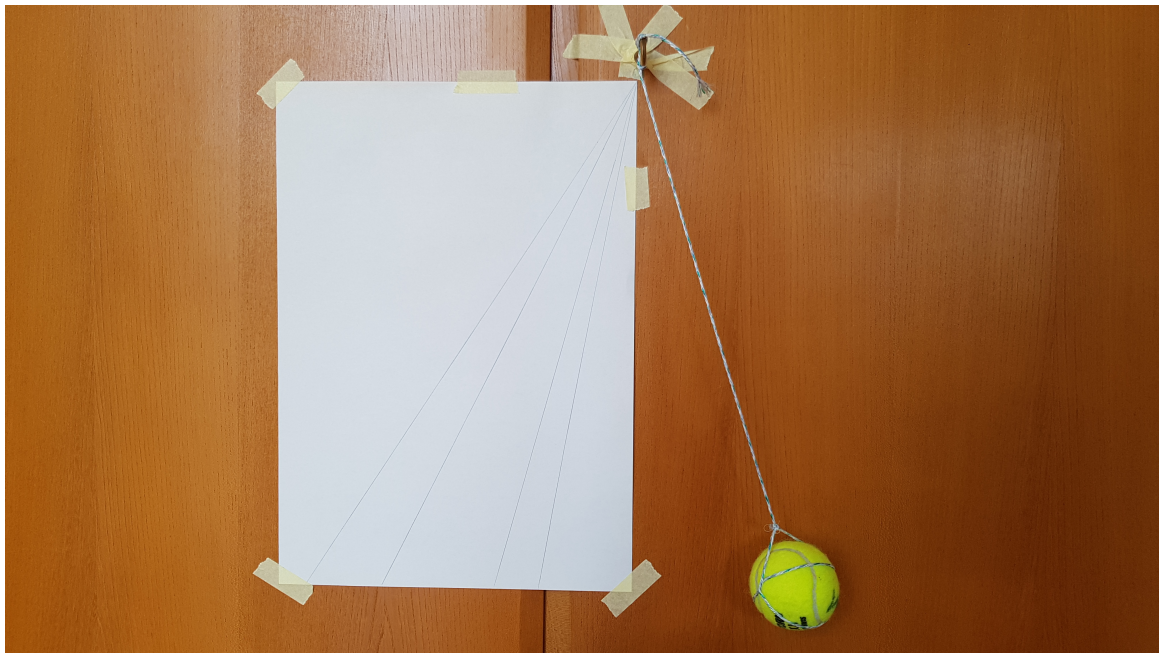


Figure 5: Versuchsaufbau von Gallus

Bei der Start- und Endzeit ist zu beachten, dass das Video in Zeitlupe mit einem Faktor 1:8 zur Echtzeit abgespielt wird, bedingt durch die hohe Bildwiederholungsrate der Kamera. Dieser Faktor wird für die Periodenzeit miteingerechnet.

Winkel	Messung Nr.	Start Zeit in s	End Zeit in s	Zeit für 3 Perioden in s	Durchschnitt Periode in s
10°	1	3.360	34.155	3.849	1.2831
	2	1.729	32.623	3.861	1.2873
	3	3.432	34.392	3.870	1.2900
14°	1	1.850	33.224	3.921	1.3073
	2	2.901	33.696	3.849	1.2831
	3	1.779	33.108	3.916	1.3054
24°	1	3.288	34.531	3.905	1.3018
	2	1.416	32.991	3.946	1.3156
	3	4.137	35.176	3.879	1.2933
31.6°	1	1.197	32.349	3.894	1.2980
	2	2.516	34.286	3.971	1.3238
	3	1.440	33.073	3.954	1.3180

Table 3: Messtabelle Gallus

3 Messunsicherheiten

Die Länge des Pendels wurde in allen drei Versuchsdurchführungen mit einem Gliedermassstab gemessen. Tatsächlich kann man mit einem Gliedermassstab zwar auf 1mm genau gemessen werden. Da die ausgewählte Schnur teilweise unter Belastung leicht elastisch reagiert und da das Gewicht der Schnur in der Bestimmung des Massenschwerpunktes nicht berücksichtigt wird, stellt es sich als schwierig heraus, die Länge vom Drehpunkt bis zum Schwerpunkt zu bestimmen. Daher scheint uns auch die in [2] aufgeführte Messunsicherheit von $\pm 1\text{cm}$ als sinnvoll.

Die Bestimmung der Periode erfolgt wie in Kapitel 2 beschrieben. Die Ermittlung der Start- und der Endzeit hat jeweils einen Fehler von ± 1 Bild. Bei den angegebenen Bilder/s der jeweiligen Messaufbauten resultiert daraus für die einzelne Periode T eine Unsicherheit von:

Serafin	$\Delta T = 0.034$
Nando	$\Delta T = 0.004$
Gallus	$\Delta T = 0.009$

Die Unsicherheitsberechnung Δg der Gravitationsbeschleunigung g erfolgt mit Gleichung 7.

In der Praxis den Pendel bei einem exakten Winkel auslenken zu lassen ist schwierig und auch nicht sinnvoll, da sich der maximale Auslenkungswinkel (bzw. die Amplitude) aufgrund von Reibungsverlusten sofort nach dem Loslassen der Masse ändert. Der Winkel ist allerdings für die Berechnungen nicht relevant. Er dient lediglich zum Vergleich, wie stark sich der Wert ändert bei verschiedenen Auslenkungen, respektive wie sinnvoll unsere Kleinwinkelannäherung ist. Allgemein lässt sich aber der Winkel mit einer Genauigkeit von $\pm 2^\circ$ einstellen. Alle Winkel im Messprotokoll und im Kapitel Ergebnis weisen also diese Genauigkeit auf. Diese Ungenauigkeit wird aus Übersichtlichkeitsgründen und weil nicht notwendig für die Berechnungen jeweils nicht angegeben.

4 Ergebnisse

Aus der Literatur ist bekannt, dass alle drei Orte in der Schweiz (Wangen SZ, St.Gallen SG, Herrliberg ZH) eine Gravitationsbeschleunigung von $9.80600 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt [1].

Im folgenden Kapitel ist mit "Durchschnittliche Periode" die Periode gemittelt über die Zeitmessung dreier Perioden gemeint. Das Verfahren ist genauer beschrieben gleich zu Beginn des Messprotokolls. Mit g ist die mit Formel 5 berechneten Gravitationsbeschleunigung gemeint. Analog dazu ist Δg die Unsicherheit der Gravitationsbeschleunigung, berechnet mit Formel 6.

4.1 Ergebnis von Nando

Winkel	Messung Nr.	Durchschnittliche Periode in s	Gravitationsbeschleunigung g in m/s^2
10°	1	2.676 ± 0.004	9.92 ± 0.01
	2	2.69 ± 0.004	9.84 ± 0.01
	3	2.68 ± 0.004	9.91 ± 0.01
		Durchschnitt:	9.89 ± 0.01
14°	1	2.676 ± 0.004	9.92 ± 0.01
	2	2.687 ± 0.004	9.84 ± 0.01
	3	2.684 ± 0.004	9.86 ± 0.01
		Durchschnitt:	9.88 ± 0.01
24°	1	2.641 ± 0.004	10.19 ± 0.01
	2	2.667 ± 0.004	9.99 ± 0.01
	3	2.696 ± 0.004	9.78 ± 0.01
		Durchschnitt:	9.99 ± 0.01
31.6°	1	2.715 ± 0.004	9.639 ± 0.009
	2	2.720 ± 0.004	9.604 ± 0.009
	3	2.716 ± 0.004	9.637 ± 0.009
		Durchschnitt:	9.627 ± 0.009

Table 4: Ergebnistabelle Nando

4.2 Ergebnis von Serafin

Winkel	Messung Nr.	Durchschnittliche Periode in s	Gravitationsbeschleunigung g in m/s^2
10°	1	8.136 ± 0.034	9.662 ± 0.023
	2	8.079 ± 0.034	9.799 ± 0.023
	3	7.858 ± 0.034	10.357 ± 0.025
	Durchschnitt:		9.939 ± 0.024
14°	1	8.079 ± 0.034	9.799 ± 0.024
	2	8.092 ± 0.034	9.767 ± 0.024
	3	8.096 ± 0.034	9.757 ± 0.023
	Durchschnitt:		9.774 ± 0.024
24°	1	8.122 ± 0.034	9.695 ± 0.023
	2	8.171 ± 0.034	9.579 ± 0.023
	3	8.166 ± 0.034	9.591 ± 0.023
	Durchschnitt:		9.622 ± 0.023
31.6°	1	8.176 ± 0.034	9.567 ± 0.023
	2	8.193 ± 0.034	9.528 ± 0.023
	3	8.188 ± 0.034	9.539 ± 0.023
	Durchschnitt:		9.545 ± 0.023

Table 5: Ergebnistabelle Serafin

4.3 Ergebnis von Gallus

Winkel	Messung Nr.	Durchschnittliche Periode in s	Gravitationsbeschleunigung g in m/s^2
10°	1	1.283 ± 0.009	9.8 ± 0.1
	2	1.287 ± 0.009	9.8 ± 0.1
	3	1.290 ± 0.009	9.7 ± 0.1
	Durchschnitt:		9.8 ± 0.1
14°	1	1.307 ± 0.009	9.5 ± 0.1
	2	1.283 ± 0.009	9.8 ± 0.1
	3	1.305 ± 0.009	9.5 ± 0.1
	Durchschnitt:		9.6 ± 0.1
24°	1	1.302 ± 0.009	9.6 ± 0.1
	2	1.316 ± 0.009	9.4 ± 0.1
	3	1.293 ± 0.009	9.7 ± 0.1
	Durchschnitt:		9.5 ± 0.1
31.6°	1	1.298 ± 0.009	9.6 ± 0.1
	2	1.324 ± 0.009	9.2 ± 0.1
	3	1.318 ± 0.009	9.3 ± 0.1
	Durchschnitt:		9.4 ± 0.1

Table 6: Ergebnistabelle Gallus

4.4 Zusammenfassung pro Person

Winkel	Durchschnitt Name	g in m/s^2
10°	Nando	9.89 ± 0.01
	Serafin	9.939 ± 0.024
	Gallus	9.78 ± 0.07
14°	Nando	9.88 ± 0.01
	Serafin	9.774 ± 0.024
	Gallus	9.6 ± 0.1
24°	Nando	9.99 ± 0.01
	Serafin	9.622 ± 0.023
	Gallus	9.5 ± 0.1
31.6°	Nando	9.63 ± 0.01
	Serafin	9.545 ± 0.023
	Gallus	9.4 ± 0.1

Table 7: Übersicht der Durchschnitte der Gravitationsbeschleunigungen aus Tabellen 4, 5, 6.

In Tabelle 7 fällt auf, dass die berechneten Gravitationsbeschleunigungen stets tiefer liegen als jene (für den selben Winkel) von Nando und Serafin. Die Tabelle 7 ist ausserdem im Plot 6 ersichtlich.

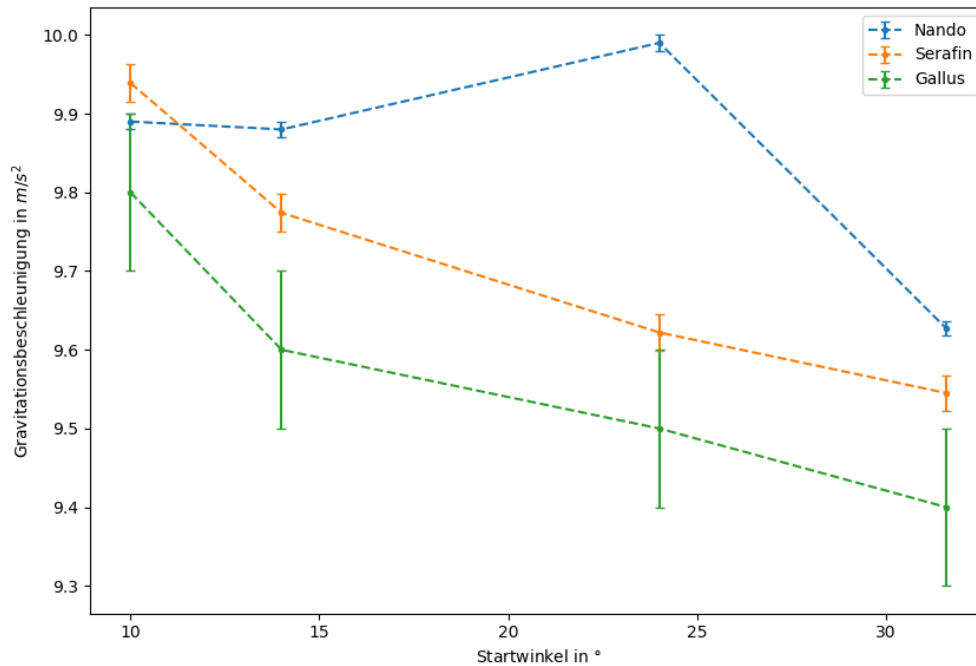


Figure 6: Plot der durchschnittliche Gravitationsbeschleunigungen pro Laborant

In Abbildung 6 sind die über drei Messungen gemittelten Werte und ihre Unsicherheiten (resultierend aus der Fehlerfortpflanzung) der Gravitationsbeschleunigung für die jeweiligen vier Winkel und für die jeweiligen drei Versuchsaufbauten. Es ist weiterhin ersichtlich, dass die Unsicherheiten von Nando am kleinsten sind, und jene von Gallus am grössten.

4.5 Zusammenfassung pro Winkel

Winkel	g in m/s^2
10°	9.869 ± 0.032
14°	9.750 ± 0.031
24°	9.711 ± 0.031
31.6°	9.520 ± 0.030

Table 8: Zusammenfassung der Gravitationsbeschleunigungen pro Winkel aus der Tabelle. 7.

Bei Tabelle 8 ist ersichtlich, dass die Messungen für die beiden kleinsten Winkel, am nächsten zum Literaturwert liegen. Bei Winkel 31.6° liegt der experimentell bestimmte Wert am weitesten weg vom Literaturwert.

5 Diskussion

In Kapitel 4 ist ersichtlich, dass Messungen mit eher kleinen Winkel bis 24° sehr nah am Literaturwert von $9.80600 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ [1] liegen und sich nur um $\pm 1\%$ unterscheiden (siehe Tabelle 9 unten). Daraus lässt sich schliessen, dass die Kleinwinkelnäherung bis ca. 24° vertretbar ist. Die prozentuale Abweichung nimmt zu, wenn der Winkel vergrössert wird und es ist erkennbar, dass Kleinwinkelnäherung immer weniger gut oder sogar nicht mehr stimmt. Weiter ist zu beachten, dass das Einstellen der Winkel eine Ungenauigkeit von $\pm 2\%$ aufweist. Daraus können wir schliessen, dass die Kleinwinkelnäherung durchaus einen messbaren Einfluss auf unser Ergebnis hat (wie auch in der Abbildung 6 zu sehen ist). Je kleiner der Winkel ist, desto kleiner ist auch der Unterschied von der Kleinwinkelannäherung zum tatsächlichen Wert. Das kommt daher, dass die Kleinwinkelannäherung die Linearisierung der Sinusfunktion um Null ist.

Winkel	Abweichung von g in %
10°	+ 0.6384
14°	- 0.5710
24°	- 0.9657
31.6°	- 2.9217

Table 9: Prozentuale Abweichung der Gravitationsbeschleunigungen gegenüber dem Literaturwert.

In der Abbildung 6 erkennt man leicht, dass die Unsicherheiten von Nando jeweils am kleinsten sind. Dies kommt daher, dass Nando die Aufnahme mit den meisten Bildern pro Sekunde gemacht hat und zusammen mit Serafin die längste Schnur gewählt hat. Dadurch lässt sich in seinem Falle die Periode am genauesten bestimmen. Es fällt weiterhin auf, dass der berechnete Wert für die Gravitationsbeschleunigung für grösser werdende Winkel bei Gallus und Serafin abnimmt, nur bei Nando hat die Messung bei 24° einen Auslenker aus diesem Schema und steigt in Relation zu den vorherigen Winkeln stark zu. Wieso das so ist, lässt sich im Nachhinein nicht bestimmen. In Tabelle 4 erkennt man, dass alle drei Messungen von Nando bei ungefähr 24° ungefähr das selbe Resultat aufweisen. Daher können wir einen zufälligen Fehler ausschliessen (Windböhen, versehentliches Anschubsen des Balles, etc.), es muss sich also um einen systematischen Fehler halten. Möglicherweise wurde der Winkel falsch abgemessen, eine Einstellung an der Kamera unwissentlich geändert oder ähnliches. Die Werte von Gallus weisen die höchste Unsicherheit auf. Obwohl Gallus mehr Bilder pro Sekunde als Serafin misst (aber weniger als Nando), ist dessen Unsicherheit dennoch grösser. Dies trotz gleicher Unsicherheit bei der Längenmessung. Da Serafin und Nando allerdings eine viel längere Schnur als Gallus verwenden, ist die Unsicherheit der Längenmessung in Relation zur gesamt gemessenen Länge kleiner. Die Unsicherheit der Längenmessung überwiegt also die Unsicherheit bei den Messungen von Gallus jene Unsicherheit der Zeitmessung.

Die Ergebnisse der berechneten Gravitationsbeschleunigung zeigen eine sehr geringe Unsicherheit auf. Genauer formuliert, liegt die Unsicherheit bei jeweils ungefähr 0.3% des Wertes für die Gravitationsbeschleunigung. Aus Tabelle 7 ist ersichtlich, dass die Messungen von Gallus für

drei von vier Winkeln eine stärkere Abweichung zum Literaturwert aufzeigen, als die Messungen von Nando und Serafin. Gallus hat im Versuchsaufbau zwei wesentliche Unterschiede zum Versuchsaufbau von Nando und Serafin. Gallus verwendet eine wesentlich kürzere Schnur und einen Tennisball anstelle eines Golfballs. Da die Länge der Schnur in der Formel 5 berücksichtigt wird, resultiert daraus, dass der Unterschied primär aus der Wahl der Masse kommt. Der Tennisball weist eine grössere Fläche auf, als jene eines Golfballes. Dadurch ist der Luftwiderstand (welcher proportional zur in Bewegungsrichtung frontalen Fläche und damit quadratisch zum Radius des Balles) beim Tennisball grösser als beim einem Golfball. Weiterhin ist ein Tennisball pelzig, was in der Aerodynamik weiterhin einen bremsenden Effekt hat. Die systematische Abweichung von den Werten von Gallus zu jenen von Nando und Serafin, lässt sich somit durch die Wahl eines Tennisballs und dessen aerodynamischen Eigenschaften im Vergleich zur Wahl eines Golfballs erklären. Dieser Unterschied zeigt auf, dass der Luftwiderstand durchaus einen messbaren Einfluss auf den Versuch hat. Diesen sinnvoll zu berücksichtigen, ist aufgrund von Turbulenzen und der damit verbundenen Mathematischen Schwierigkeiten schwer möglich. In einem zukünftigen Experiment könnte man das Pendel in einem Vakuum pendeln lassen, oder die Turbulenzen numerisch simuliert berücksichtigen.

Über die Unsicherheiten lässt sich schliesslich sagen, dass der Literaturwert nicht innerhalb der bestimmten Toleranzangaben liegt. Dieser Unterschied entspringt aber nicht etwa einer ungenauen Messung oder unvernünftigen Fehlerabschätzungen, sondern aus dem Unterschied der Kleinwinkelannäherung und dem Nichtberücksichtigen des Luftwiderstands in unseren Berechnungen entspringt.

Abschliessend lässt sich sagen, dass die in diesem Versuch ermittelte Gravitationsbeschleunigung für kleine Winkel (bis $(24 \pm 2)^\circ$) um weniger als 1% des Literaturwertes abweicht. Der Versuch die Gravitationsbeschleunigung zu bestimmen, sehen wir also als gelungen an.

References

- [1] Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS. *Die Gravitationszonen der Schweiz*. URL: <https://www.metas.ch/metas/de/home/dok/gravitationszonen.html>. (accessed: 25.05.2020).
- [2] Bernd Pesch. *Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM*. BoD – Books on Demand, 2004. Chap. 7.5 Einflussgrößen, pp. 203–204.